CONCOURS 1988

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème $\mathcal{E}$ désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}$. L'équation normale d'un cercle de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (avec $a^2 + b^2 - c > 0$).

A ce cercle on associe la forme quadratique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont l'expression dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$q(X, Y, T) = X^2 + Y^2 - 2aXT - 2bYT + CT^2.$$

L'équation normale du cercle ci-dessus est alors : $q(x, y, 1) = 0$. φ désigne la forme bilinéaire symétrique polaire de la forme quadratique q. Montrer que la tangente au cercle en un point M_0 de celui-ci de coordonnées (x_0, y_0) a pour équation cartésienne : $\varphi[(x, y, 1), (x_0, y_0, 1)] = 0$.

On désigne par (Γ_1) le cercle du plan $\mathcal{E}$ d'équation $(x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0$ $(d > 0, R > 0)$ et par (Γ_2) le cercle du plan $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$.

Les formes quadratiques associées à ces cercles seront notées respectivement q_1 et q_2.

I

1. Déterminer le rang de la forme quadratique q_1, sa signature et sa matrice A_1 dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Même question pour la forme quadratique q_2 (on notera A_2 sa matrice).

2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur a pour coordonnées $\left(\frac{d-R}{2R}, 0, \frac{1}{2R}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ et dans laquelle q_1 a pour matrice :

$$A_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et donner l'expression de q_1 dans la base $\mathcal{B}'$ (on notera (X', Y', T') les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}'$).

3. On note Φ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{E}$ qui associe à tout vecteur $\vec{u} = (X, Y, T)$ avec $T \neq 0$ le point de coordonnées $\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Montrer que pour tout point M de (Γ_1), différent d'un point Ω que l'on déterminera, il existe un unique réel t tel que M soit image par Φ du vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(t^2, t, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. t sera appelé le paramètre de M.

4. Soit D la droite de $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $ux + vy + h = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$.

On lui associe le plan vectoriel Δ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $uX + vY + hT = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et $u'X' + v'Y' + h'T' = 0$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a. Calculer u', v', h' en fonction de u, v, h.

b. Montrer que la droite D est tangente à (Γ_2) en M_0 de coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{R}$ si et seulement s'il existe un réel non nul λ tel que $[u\ v\ h] = \lambda [x_0\ y_0\ 1]\, A_2$. ($[u\ v\ h]$ et $[x_0\ y_0\ 1]$ désignent des matrices lignes).

c. Déduire de ce qui précède que les trois propositions ci-dessous sont deux à deux équivalentes :

(1) D est tangente à (Γ_2)

(2) $$[u\ v\ h]\, A_2^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix} = [0]$$

(3) $$[u'\ v'\ h']\, A_2'^{-1} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{bmatrix} = [0]$$

($\begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{bmatrix}$ désignent des matrices colonnes, $[0]$ la matrice nulle carrée d'ordre trois; A_2' est la matrice de q_2 dans la base $\mathcal{B}'$, on ne demande pas de calculer les éléments de A_2').

5. Soient M_1 et M_2 deux points distincts de (Γ_1), différents de Ω, de paramètres respectifs t_1 et t_2. Soit D la droite M_1M_2 et Δ le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui lui correspond (cf. I.4). Montrer qu'une équation de Δ dans $\mathcal{B}'$ est :

$$X' + \alpha(t_1, t_2)\, Y' + \beta(t_1, t_2)\, T' = 0$$

où α et β sont des fonctions de t_1 et t_2 que l'on déterminera.

Tournez la page S. V. P.

6. Les notations utilisées sont celles des questions 4 et 5.

On écrit $A_2'^{-1} = \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix}$.

On ne demande pas de calculer les éléments de $A_2'^{-1}$. Montrer que la droite $M_1 M_2$ est tangente au cercle (Γ_2) si et seulement si : $[t_1^2\ t_1\ 1]\ C \begin{bmatrix} t_2^2 \\ t_2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$, C désignant une matrice carrée d'ordre 3. Calculer les éléments de C en fonction de ceux de $A_2'^{-1}$.

II

Dans la suite du problème on précise que d, R et r vérifient la relation :

$$0 < |d - R| < r < d + R.$$

1. Représenter sur un dessin les positions relatives des cercles (Γ_1) et (Γ_2) et mettre en place le point Ω. Montrer que d'un point M de (Γ_1) différent de Ω et de paramètre t sont issues des tangentes à (Γ_2) si et seulement si $t \in [-t_0, t_0]$ où t_0 est un réel que l'on déterminera en fonction de d, R, r.

2. Soit M_1 un point de (Γ_1) de paramètre $t_1 \in]-t_0, t_0[$. De M_1 on mène deux tangentes à (Γ_2). Elles recoupent (Γ_1) en M_2 et M_3 de paramètres respectifs t_2 et t_3. On suppose que $M_1 \neq M_2$ et $M_1 \neq M_3$.

   a. Montrer que M_2 et M_3 sont distincts.

   b. Soit D la droite $M_2 M_3$ et Δ le plan de $\mathbb{R}^3$ qui lui est associé (cf. I.5).

   Montrer qu'une équation de Δ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $u'X' + v'Y' + h'T' = 0$ où $[u'\ v'\ h'] = [t_1^2\ t_1\ 1]\ C$ (C est définie comme dans I.6).

   c. On suppose qu'il existe un réel λ non nul tel que : $C\ A_2'^{-1}\ C = \lambda\ A_1'$.

   Montrer que la droite $M_2 M_3$ est tangente à (Γ_2).

3. *a.* Déduire de II.2 qu'une condition suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans (Γ_1) (c'est-à-dire dont les sommets sont sur (Γ_1)) et circonscrit à (Γ_2) (c'est-à-dire dont les côtés sont tangents à (Γ_2)) est :

   (4) $\qquad a'^2 - 4bb'' + aa'' + 2a'b' = 0$

   (cf. I.6 pour les définitions de a, a', a'', ...).

   b. λ_1, λ_2, λ_3 désignant les valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice $A_1' A_2'^{-1}$, montrer qu'il existe un réel k, que l'on déterminera, tel que : (4) $\Leftrightarrow$ (5) : $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = k(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

   c. Montrer que cette dernière condition reste valable si on remplace A_1' par A_1 et A_2' par A_2.

4. Exprimer la condition (5) en fonction de R, d, r.

III

Les notations sont celles de I et II.

De M_1 point de (Γ_1), différent de Ω, de paramètre $t_1 \in]-t_0, t_0[$ on mène deux tangentes à (Γ_2). Elles recoupent (Γ_1) en M_2 et M_3 respectivement (on suppose que M_1, M_2 et M_3 sont deux à deux distincts). De M_2 on mène deux tangentes à (Γ_2). L'une est $M_2 M_1$, l'autre recoupe (Γ_1) en M_4. On se propose de déterminer une condition suffisante pour que $M_1\ M_2\ M_3\ M_4$ soit un quadrilatère inscrit dans (Γ_1) et circonscrit à (Γ_2).

1. La matrice C ayant la même signification que dans I.6, on désigne par ψ la forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice C dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

   On note $\vec{u_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ayant pour coordonnées $(t_i^2, t_i, 1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

   Montrer que, si ψ est dégénérée, $M_3 M_4$ est tangente à (Γ_2).

2. λ_1, λ_2, λ_3 sont les valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de la matrice $A_1' A_2'^{-1}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ et $\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ pour que l'une des valeurs propres λ_i soit la somme des deux autres.

3. Établir qu'une condition suffisante pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans (Γ_1) et circonscrit à (Γ_2) est que l'une des valeurs propres λ_i soit la somme des deux autres.

4. Montrer que la condition suffisante cherchée peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = f(r) \text{ où } f(r) \text{ est une expression à déterminer.}$$

o o o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail